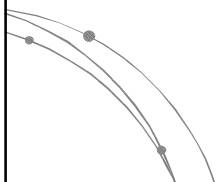


Kombinatorické problémy a algoritmy



Kombinatorická matematika

- zajímá se o konečné a diskrétní problémy
- konečný počet proměnných
- konečný počet hodnot pro každou proměnnou
- tudíž hrubá síla vždy funguje:
 - vyzkoušet všechny kombinace hodnot všech proměnných
 - poskytnout výsledek v konečném čase, tudíž
 - je to algoritmus
- ... ale většinou není prakticky použitelná

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

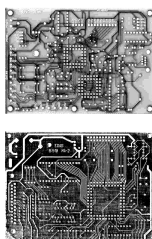
1

Problém a instance

problém

Nalézt optimální (nejkratší) cestu pro NC vrtačku na dané desce, která začíná a končí v předepsané klidové pozici.

instance



Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

2

Kombinatorický problém

Charakterizován:

- vstupními proměnnými
- výstupními proměnnými
- konfiguračními proměnnými
- omezením
- optimalizačním kritériem, pokud je třeba

Konfigurační proměnné – to, co nastavuje hrubá síla
Proměnných je konečný počet a mají konečné domény

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

3

Příklad

vstupní proměnné
výstupní proměnné
konfigurační proměnné
omezením
optimalizační kritérium

seznam děr

pořadí děr

pořadí děr

- uzavřená cesta
- každá díra právě jednou

nejkratší

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

4

Instance a řešení problému

instance problému

ohodnocení
vstupních proměnných

konfigurace

ohodnocení
konfiguračních proměnných

při řešení
nějaké
instance

řešení
instance

konfigurace, která splňuje
omezení

optimální
řešení

řešení s nejlepší hodnotou
optimalizačního kritéria

suboptimální
řešení

řešení s vyhovující hodnotou
optimalizačního kritéria

čemu?

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

5

Problém batohu

Jsou dána přirozená čísla $n, M, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$. Nalezněte čísla $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ z množiny $\{0, 1\}$ tak, aby

$$\sum_{i=1}^n x_i w_i \leq M$$

$$\sum_{i=1}^n x_i c_i = \max$$

Je dáno n věcí, i -tá věc má váhu w_i a cenu c_i , dále batoh s nosností M . Nalezněte takovou sestavu věcí v batohu, aby nebyl přetížen a cena věcí byla maximální.

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

6

Problém batohu

Vstupní proměnné: $n, M, W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}, C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

Konfigurační proměnné: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, x_i \in \{0, 1\}$

Výstupní proměnné: tytéž

Omezení:

$$\sum_{i=1}^n x_i w_i \leq M$$

Optimalizační kritérium:

$$\sum_{i=1}^n x_i c_i = \max$$

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

7

Instance a konfigurace

instance $n=3, M=6, C=\{10, 20, 30\}, W=\{2, 3, 5\}$

	x_1	x_2	x_3	$\sum x_i c_i$	$\sum x_i w_i$	
všechny konfigurace	0	0	0	0	0	✓ triviální
	0	0	1	30	5	✓✓
řešení ✓	0	1	0	20	3	✓
	0	1	1	50	8	⊗
optimální řešení ✓	1	0	0	10	2	✓
	1	0	1	40	7	⊗
	1	1	0	30	5	✓✓
	1	1	1	60	10	⊗

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

8

Typy kombinatorických problémů

Nechť I je instance, Y konfigurace, $R(I, Y)$ omezení (tj. $R(I, Y)$ říká, zda Y je řešením)

- rozhodovací problém
Existuje Y takové, že $R(I, Y)$?
- konstruktivní problém
Sestrojit nějaké Y takové, že $R(I, Y)$.
- enumerační problém
Sestrojit všechna Y taková, že $R(I, Y)$.

inženýrské úlohy vždy něco optimalizují!?

Optimalizační problémy

Nechť I je instance, Y konfigurace, $R(I, Y)$ omezení a $C(Y)$ optimalizační kritérium (cenová funkce)

- optimalizační rozhodovací problém
Existuje Y takové, že $R(I, Y)$ a $C(Y)$ je lepší než daná konstanta Q ?
- optimalizační konstruktivní problém
Sestrojit nějaké Y takové, že $R(I, Y)$ a $C(Y)$ je nejlepší možné.
- optimalizační enumerační problém
Sestrojit všechna Y taková, že $R(I, Y)$ a $C(Y)$ je nejlepší možné.
- optimalizační evaluační problém
Zjistit nejlepší možné $C(Y)$ takové, že $R(I, Y)$.

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

Problém splnitelnosti booleovské formule (SAT)

Dáno:

n proměnných $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Booleovská formule $F(X)$ v konjunktivní normální formě (součin součtů), např.

$$F(X) = (x_1 + x_2' + x_3) (x_1' + x_2) (x_1' + x_3')$$

Nalézt:

Je tato formule splnitelná?

Tj. existuje ohodnocení $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ takové, že $F(Y) = 1$?

splnitelnost = satisfiability, odtud zkratka SAT

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

Verze SAT

Rozhodovací verze

- Existuje ohodnocení Y takové, že $F(Y)=1$?

Konstruktivní verze

- Sestrojit ohodnocení Y takové, že $F(Y)=1$

Enumerační verze

- Sestrojit všechna ohodnocení Y taková, že $F(Y)=1$

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

12

Optimalizační SAT

Optimalizační rozhodovací verze

- Existuje ohodnocení Y takové, že $F(Y)=1$ a Y má méně než Q jedniček?

Konstruktivní verze

- Sestrojit ohodnocení Y takové, že $F(Y)=1$ a Y má co nejméně jedniček.

Enumerační verze

- Sestrojit všechna ohodnocení Y taková, že $F(Y)=1$ a Y má co nejméně jedniček.

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

13

Verze SAT - shrnutí

	rozh.	konstr.	enum.	opt. rozh.	opt. konstr.	opt. enum.
vstup	F, X	F, X	F, X	F, X	F, X	F, X
konfigu-race	Y	Y	Y	Y	Y	Y
výstup	ano-ne	Y	$\{Y\}$	ano-ne	Y	$\{Y\}$
omezení	$F(Y)=1$	$F(Y)=1$	$F(Y)=1$	$F(Y)=1$	$F(Y)=1$	$F(Y)=1$
opt. kritérium				min. počet jedniček	min. počet jedniček	min. počet jedniček

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

14

SAT „folklor“

		maxSAT	
vstup	F, X	F, X	F, X, W
konfigu-race	Y	Y	Y
výstup	Y	Y	Y
omezení	$F(Y)=1$	---	---
opt. kritérium	min. počet jedniček	max. počet splněných termů	max. vážený počet splněných termů

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

15

Vztah verzí problémů

- Inženýrská praxe – často optimalizační problémy
- Teoretická odvození – rozhodovací problémy (jednoduchý výstup)
- Mají na to matematici právo?
- Optimalizační problém neúnosně složitý $\Leftrightarrow$ rozhodovací verze neúnosně složitá
- Proč ...
- Co je to neúnosně ...

Petr Fíšer a Jan Schmidt 2006

16