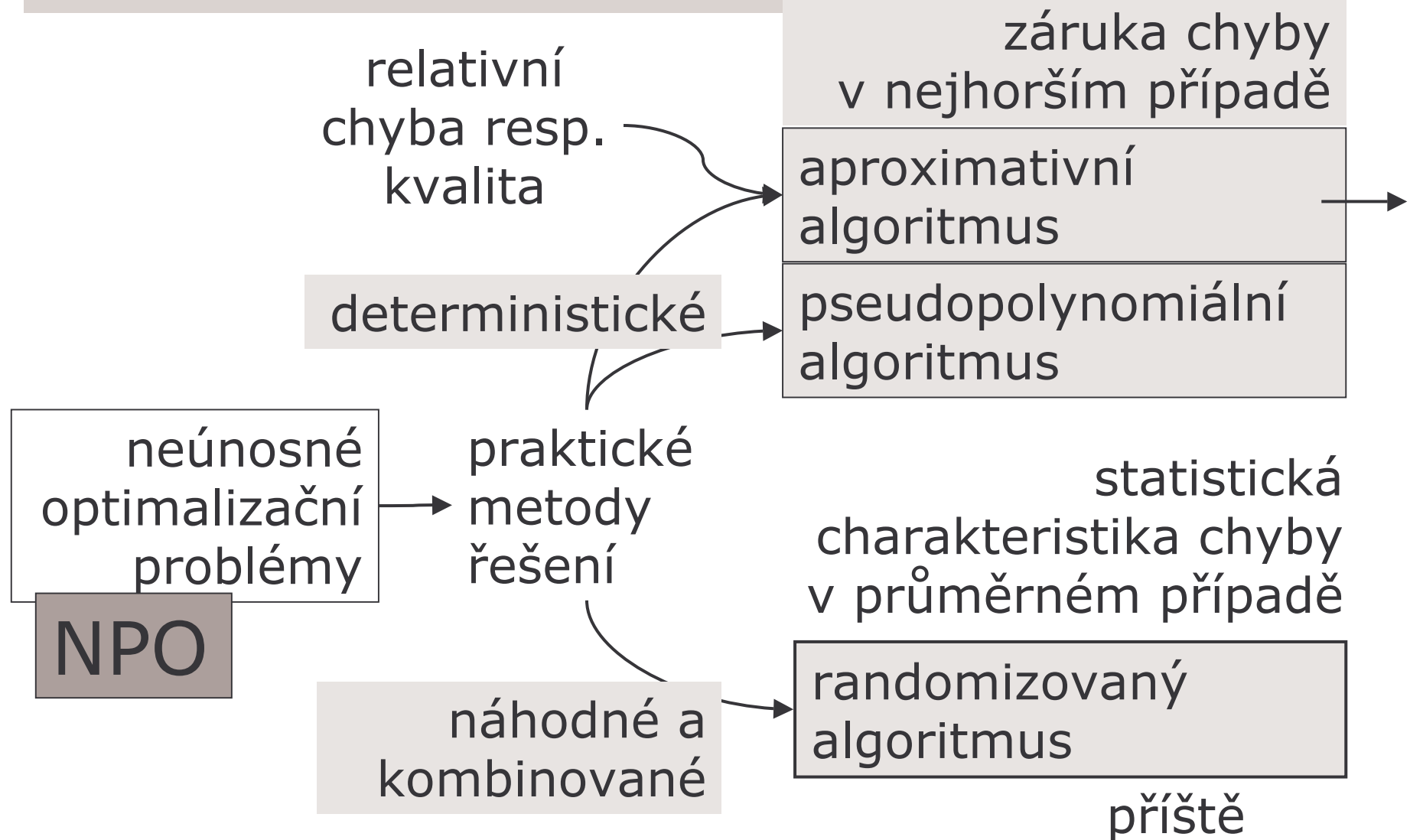
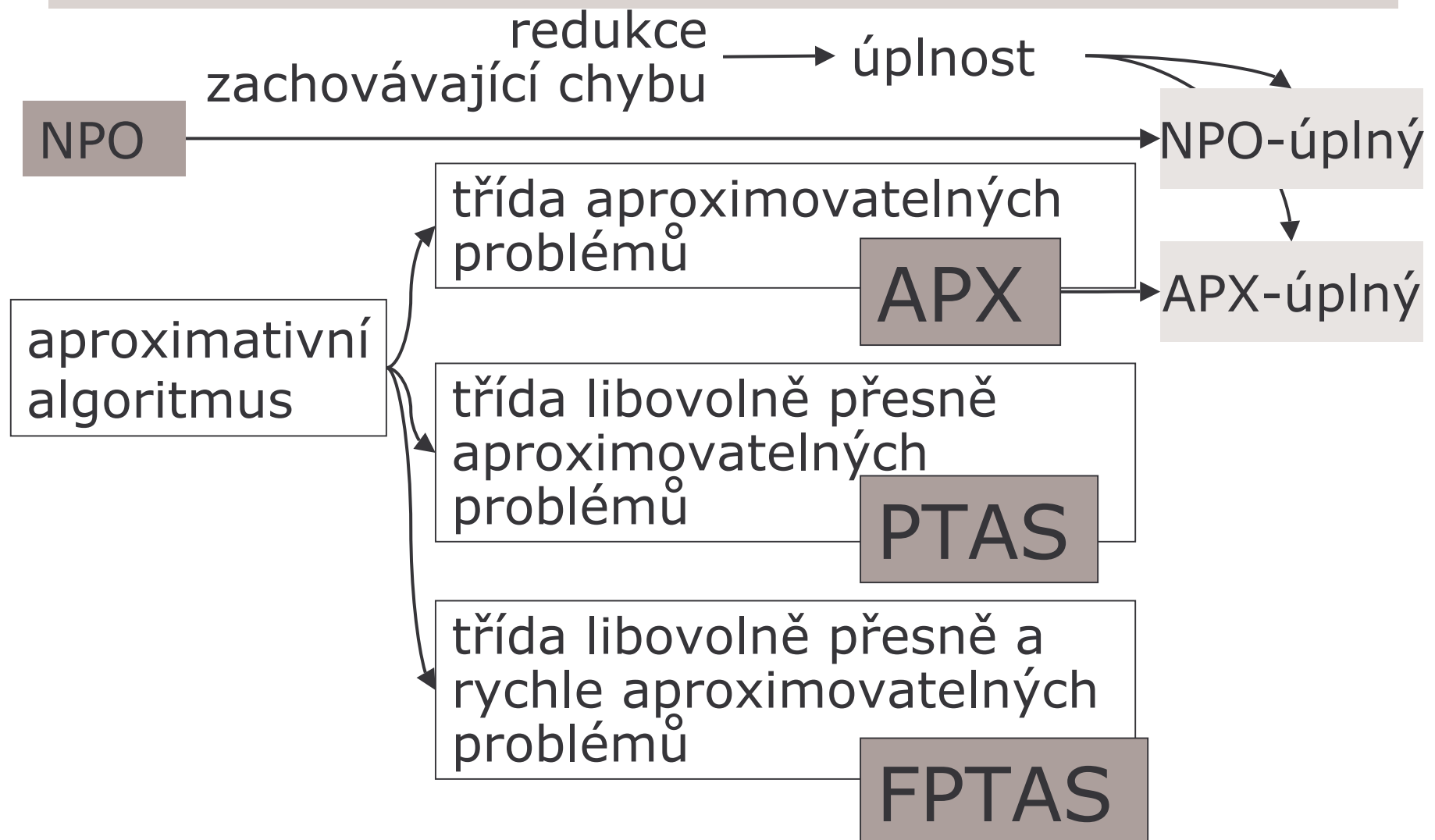


Aproximativní algoritmy

Aproximativní algoritmus



Třídy aproximovatelnosti

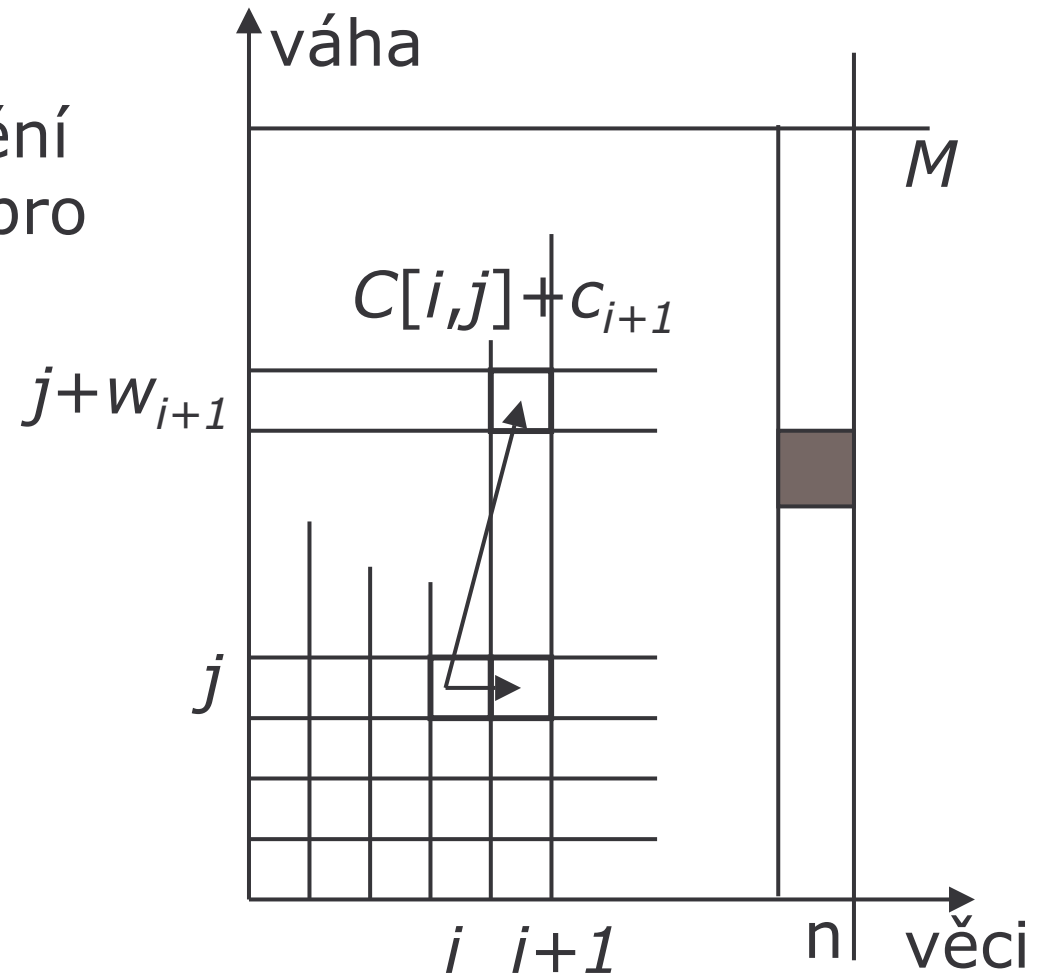


Pseudopolynomiální algoritmy

Pseudopolynomiální algoritmus pro problém batohu

$C[i,j]$:
cena optimálního plnění
batohu s kapacitou j pro
prvých i věcí

Výsledek:
maximální $C[n,j]$



Složitost

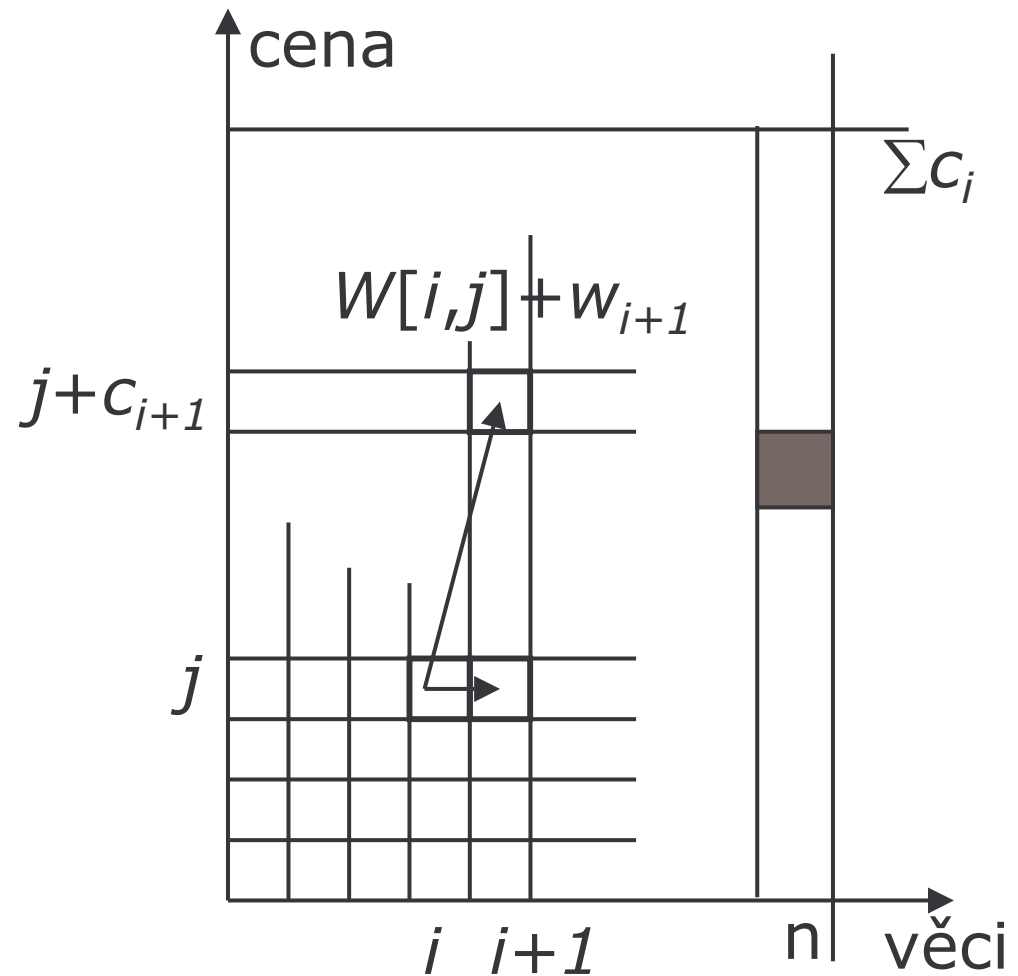
- Pole má $n.M$ prvků
- Každý prvek lze vypočítat v konstantním čase
- Složitost $O(n.M)$

M nesouvisí s velikostí instance (měřené jakýmkoli rozumným způsobem)

Varianta

$W[i,j]$:
váha optimálního
(nejlehčího) plnění
batohu s cenou j pro
prvých i věcí

Výsledek:
 $W[n,j] \leq M$
s maximálním j



Složitost

- Velikost pole $n.\Sigma c_i$
- Každý prvek lze spočítat v konstantním čase
- Nechť $C_M = \max \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$.
- Pak $\Sigma c_i \leq n.C_M$
- Složitost $O(n^2.C_M)$

C_M nesouvisí s velikostí instance (měřené jakýmkoli rozumným způsobem)

Pseudopolynomiální algoritmus

- Definice:
Algoritmus, jehož počet kroků závisí polynomiálně na velikosti instance, ale závisí dále na parametru, který s velikostí instance nesouvisí, nazýváme pseudopolynomiálním.

Aproximativní algoritmy, aproximovatelné problémy a jejich třídy

Aproximativní algoritmus pro problém batohu

Algoritmus APR-KNAP:

- Věci seřadte podle klesajícího poměru cena/hmotnost
- V tomto pořadí vkládejte do batohu, pokud není překročena nosnost batohu
- Výsledné řešení porovnejte s řešením, které se skládá pouze z jediné, nejcennější věci

Výsledné řešení má cenu $\geq 50\%$ optimálního řešení

Měření kvality

$C(S)$ hodnota opt. kritéria řešení S

$APR(I)$ aprox. řešení instance I

$OPT(I)$ optimální řešení instance I

Definice:

Algoritmus APR má relativní kvalitu R , jestliže

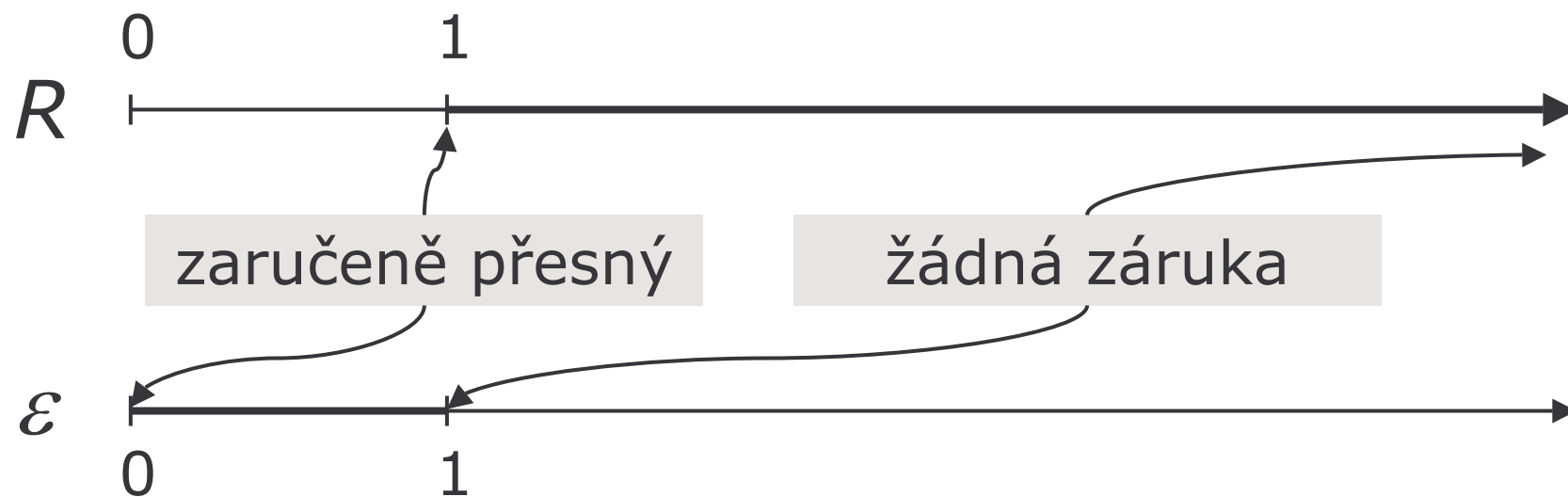
$$R \geq \max_{\forall I} \left\{ \frac{C(APR(I))}{C(OPT(I))}, \frac{C(OPT(I))}{C(APR(I))} \right\}$$

Algoritmus APR má relativní chybu R , jestliže

$$\varepsilon \geq \max_{\forall I} \left\{ \frac{|C(APR(I)) - C(OPT(I))|}{\max \{ C(OPT(I)), C(APR(I)) \}} \right\}$$

Vlastnosti

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{R}$$



Aproximativní algoritmus, třída APX

- Definice:
Algoritmus APR pro problém Π je R -aproximativní (ε -aproximativní), jestliže jeho relativní kvalita (relativní chyba) je $R(\varepsilon)$.
- Definice:
Optimalizační problém Π je R -aproximativní (ε -aproximativní), jestliže pro něj existuje R -aproximativní (ε -aproximativní) polynomiální algoritmus. Číslo $R(\varepsilon)$ nazveme aproximačním prahem problému Π .
- Definice:
Optimalizační problém Π patří do třídy APX, jestliže je R -aproximativní pro konečné R .

Příklad: algoritmus A^+

- Problém uzlového pokrytí: dán graf $G=(V,E)$; sestrojit $V' \subseteq V$ takovou, že $|V'| = \min$ a $\forall (u,v) \in E, u \in V'$ nebo $v \in V'$.
- Algoritmus:
 1. $V' = \emptyset$
 2. dokud $E \neq \emptyset$
 - a. zvol hranu $(u,v) \in E$
 - b. $V' = V' \cup \{u,v\}$
 - c. odstraň z E hrany incidentní s u nebo v

Důkaz

- Algoritmus:
 1. $V' = \emptyset$
 2. dokud $E \neq \emptyset$
 - a. zvol hranu $(u,v) \in E$
 - b. $V' = V' \cup \{u,v\}$
 - c. odstraň z E hrany incidentní s u nebo v

- podle konstrukce: V' reprezentuje $|V'|/2$ hran, které neincidují
- $\Rightarrow V'_{\text{OPT}}$ musí mít nejméně $|V'|/2$ uzlů
- $\Rightarrow \varepsilon_{A+} \leq \frac{|V'| - |V'_{\text{OPT}}|}{|V'|} \leq 1/2.$
- na grafu o 1 hraně se toho dosáhne
- $\Rightarrow \varepsilon_{A+} = 1/2, R_{A+} = 2$



$$V' = \{A, B\}$$

$$V'_{\text{OPT}} = \{A\}$$

Příklad: A^{++}

- Algoritmus:
 1. $V' = \emptyset$
 2. dokud $E \neq \emptyset$
 - a. zvol hranu $(u,v) \in E$ tak, že $\deg(u) + \deg(v) = \max$.
 - b. $V' = V' \cup \{u,v\}$
 - c. odstraň z E hrany incidentní s u nebo v

Analýza nejhoršího případu je stejná, ale průměrný čas je lepší.

Příklad: B⁺

- Algoritmus:

1. $V' = \emptyset$

2. dokud $E \neq \emptyset$

a. zvol uzel $v \in V - V'$,
tak, že $\deg(v) = \max$.

b. $V' = V' \cup \{v\}$

c. odstrañ z E hrany
incidentní s v

Protipříklad

předpokládáme
horší případ

$$V'_{\text{OPT}} = \{b_i\}$$

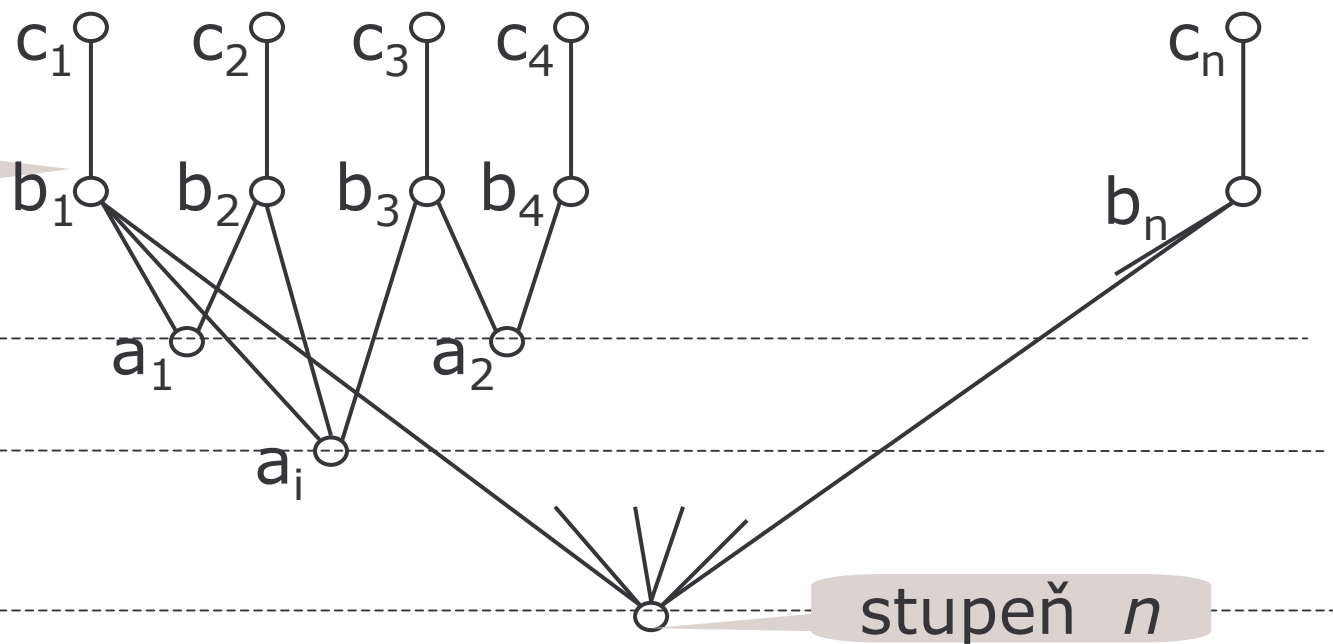
$$V' = \{a_i, c_i\}$$

stupeň n

disjunktní:
páry

trojice

n -tice



$$|V'_{\text{OPT}}| = n \quad |V'| = \sum_{j=1}^n \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor \geq 1 + n \cdot \ln n$$

špatná zpráva: $R_{B+} > 1/n + \ln n$

není
aproximativní

Zhodnocení B^+

špatná zpráva: $R_{B^+} > 1/n + \ln n$

S rostoucím n roste chyba na předloženém protipříkladu nade všechny meze

$\Rightarrow$ nelze dát žádnou záruku

$\Rightarrow B^+$ není aproximativní

dobrá zpráva (odjinud): $R_{B^+} < 1 + \ln n$

Aproximační prahy

uzlové pokrytí	$\varepsilon_{VC} \leq 1/2$	
batoh	$\varepsilon_K > 0$	libovolně malé číslo
TSO	$\varepsilon_{TSO} = 1$	pokud $P \neq NP$
ΔTSO (metrický)	$\varepsilon_{\Delta TSO} \leq 1/3$	
TSO geometrický	$\varepsilon_{gTSO} > 0$	libovolně malé číslo



PTAS

(Polynomial Time Approximation Scheme)

- Definice:

Algoritmus APR, který pro každé $\varepsilon > 0$ vyřeší každou instanci problému I s relativní chybou nejvýše ε v čase polynomiálním v $|I|$ nazýváme polynomiální aproximační schéma problému I .

- Definice:

Problém I patří do třídy PTAS, jestliže pro I existuje polynomiální aproximační schéma.

Polynomiální aproximační schéma pro problém batohu

- Dáno: $0 < \varepsilon \leq 1$
- Algoritmus PTAS-KNAP:
 - nechť S je množina konfigurací batohu, které obsahují $\lceil 1/\varepsilon \rceil$ věcí nebo méně
 - každou konfiguraci z S doplnit algoritmem APR-KNAP
- Složitost:
 - $O(|I| \log |I|)$ ve velikosti instance
 - $O(2^{1/\varepsilon})$ v převrácené hodnotě relativní chyby

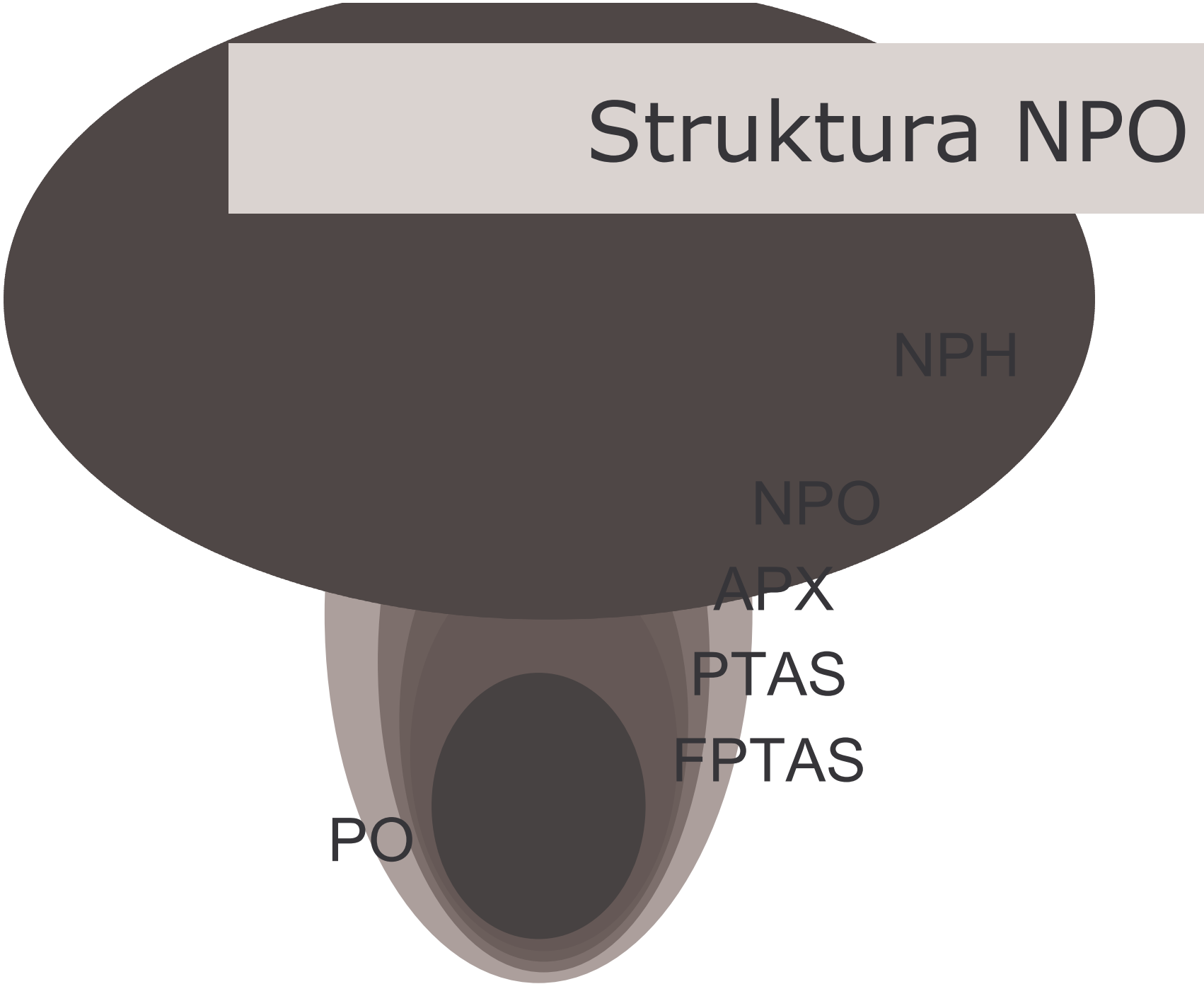
půjde to lépe?

FPTAS

(Fully Polynomial Time Approximation Scheme)

- Definice:
Polynomiální aproximační schéma APR, jeho čas výpočtu závisí polynomiálně na $1/\varepsilon$, nazýváme plně polynomiální aproximační schéma.
- Definice:
Problém Π patří do třídy FPTAS, jestliže pro Π existuje plně polynomiální aproximační schéma.

Struktura NPO



NPH

NPO

APX

PTAS

FPTAS

PO

Plně polynomiální aproximační schéma pro problém batohu

- Instance: $n, M, c_1, c_2, \dots, c_n, w_1, w_2, \dots, w_n$.
- Nechť $C_M = \max \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$.
- Existuje pseudopolynomiální algoritmus se složitostí $O(n^2 C_M)$.
- Zanedbáme b nejméně významných bitů v cenách.
- Složitost $O(\frac{n^2}{2^b} C_M)$. Relativní chyba $\varepsilon = \frac{n \cdot 2^b}{C_M}$
- Pro $0 < \varepsilon \leq 1$ volíme $b = \lceil \log \frac{\varepsilon C_M}{n} \rceil$
- Složitost $O(\frac{n^3}{\varepsilon}) \Rightarrow$ plně polynomiální aproximační schéma.
- Aproximativní algoritmus = přesný algoritmus nad zjednodušeným modelem

hlavní
fígl

Aproximačně nejtěžší
problémy

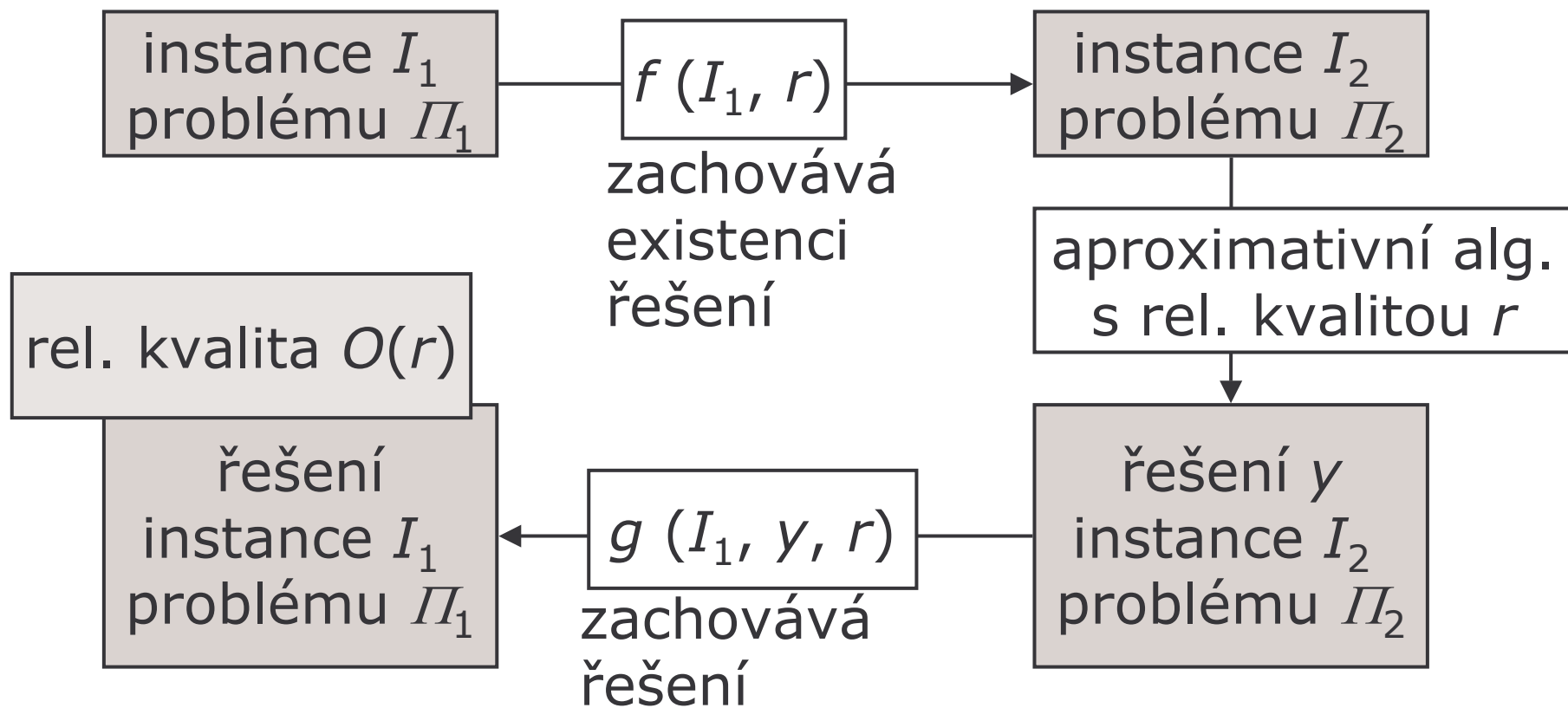
Úplnost

- Problém Π je X-těžký, jestliže se efektivní řešení všech problémů z třídy X dá zredukovat na efektivní řešení problému Π .
- Problém Π je X-úplný, jestliže je X-těžký a sám patří do třídy X.
- Efektivní řešení: zde: aproximovatelné řešení
- Redukce: zachovává efektivitu, zde: zachovává aproximaci

APX redukce

$$\Pi_1 \overset{\text{APX}}{\propto} \Pi_2$$

Nechť $\Pi_1, \Pi_2 \in \text{NPO}$.



Vlastnosti

- $\Pi_1 \overset{\text{APX}}{\propto} \Pi_2, \Pi_2 \in \text{APX} \Rightarrow \Pi_1 \in \text{APX}$
- $\Pi_1 \overset{\text{APX}}{\propto} \Pi_2, \Pi_2 \in \text{PTAS} \Rightarrow \Pi_1 \in \text{PTAS}$

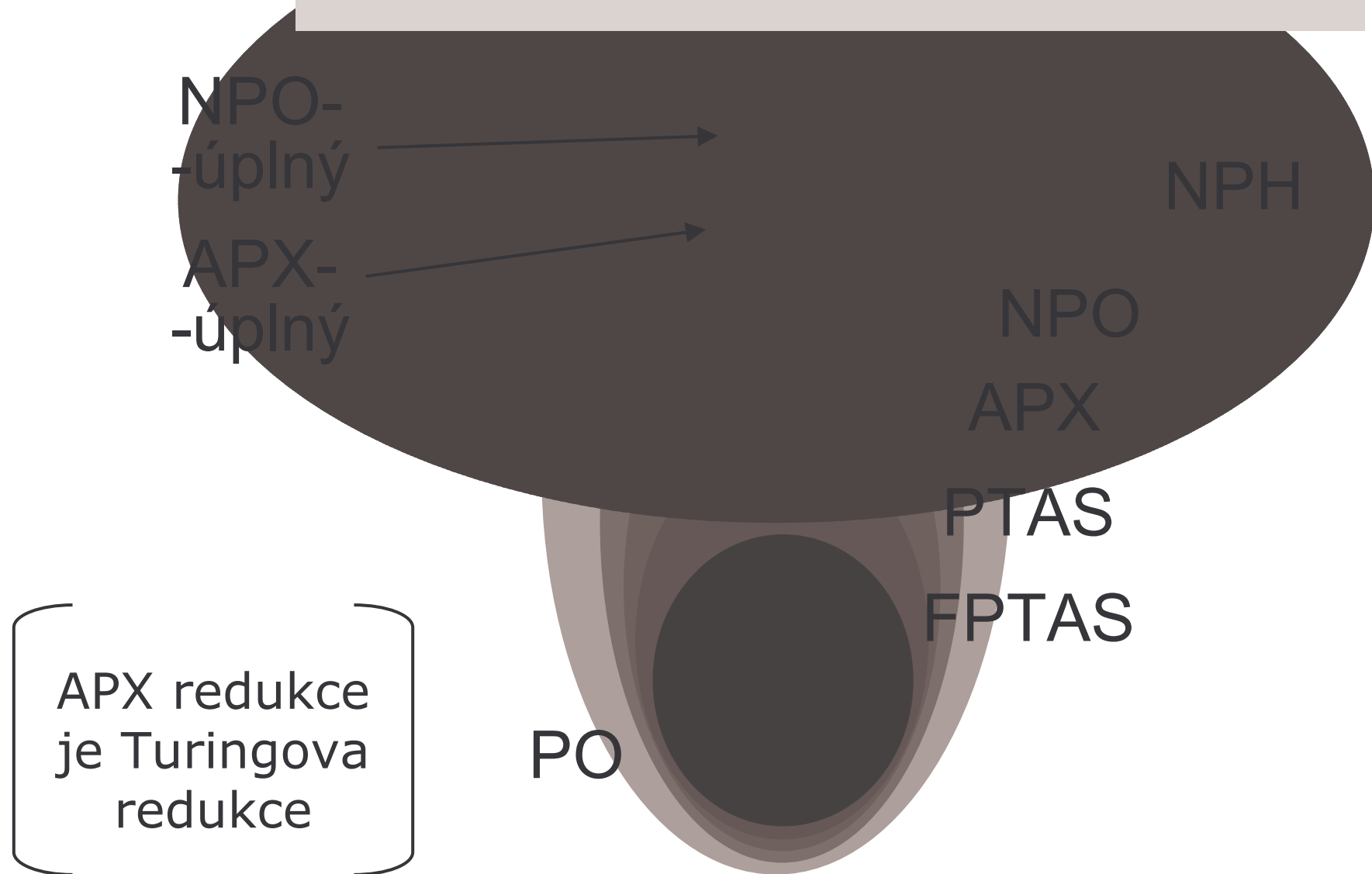
NPO-úplný, -těžký

- Problém Π je NPO-těžký, jestliže $\forall \Pi' \in \text{NPO}, \Pi' \stackrel{\text{APX}}{\infty} \Pi$.
- Problém Π je NPO-úplný, jestliže je NPO-těžký a $\Pi \in \text{NPO}$.

APX-úplný, -těžký

- Problém Π je APX-těžký, jestliže $\forall \Pi' \in \text{APX}, \Pi' \stackrel{\text{APX}}{\infty} \Pi$.
- Problém Π je APX-úplný, jestliže je APX-těžký a $\Pi \in \text{APX}$.

Struktura NPO



Problém pokrytí

- Dáno:
kolekce C podmnožin konečné množiny S .
- Zkonstruovat:
 - podmnožinu $C' \subseteq C$ takovou, že každý prvek S patří do alespoň jedné podmnožiny z C' , a dále $|C'| = \min$. (unátní pokrytí)
 - podmnožinu $C' \subseteq C$ takovou, že každý prvek S patří do právě jedné podmnožiny z C' , a dále $|C'| = \min$. (binátní pokrytí)

Optimalizační SAT-folklór

		MAX WEIGHTED SAT	MAX SAT	MAX WEIGHTED SAT(!)
vstup	F, X	F, X, W	F, X	F, X, W
konfigurace	Y	Y	Y	Y
výstup	Y	Y	Y	Y
omezení	$F(Y) = 1$	$F(Y) = 1$	---	---
opt. kritérium	max. počet jedniček	max. vážený počet jedniček	max. počet splněných termů	max. vážený počet splněných termů

Dobré a špatné zprávy

Problém	Dobré (R)	Špatné
Min. uzlové pokrytí	$2 \cdot \log \log V $ / $2 \log V $ 1985	APX-úplný 1991
Min. (unátní) pokrytí množiny S	$1 + \ln S $ 1974	Není v APX 1993
MAX SAT (počet klauzulí)	1.2987 1997	APX-úplný 1991
MAX WEIGHTED SAT (váha proměnných v 1)		NPO-úplný
Batoh	FPTAS 1975	

Dobré a špatné zprávy

Problém	Dobré	Špatné
TSO		NPO-úplný 1987
Δ TSO	$R=1.5$ 1976 Christofides	APX-úplný 1993
Geom. TSO souřadnice $\in \mathbf{Z}$	PTAS 1996	
Geom. TSO souřadnice $\in \mathbf{Q}$		APX-úplný 1997