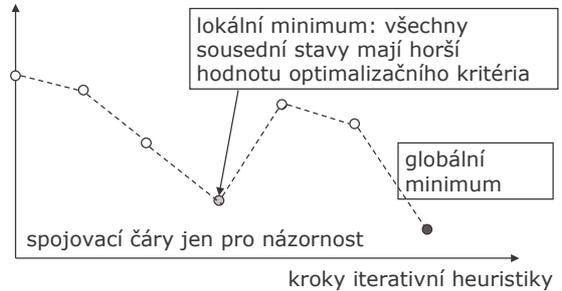


Simulované ochlazování Simulated Annealing, SA

- princip, fyzikální analogie
- formulace algoritmu
- vlastnosti
- způsob použití
- vývoj
- příklad

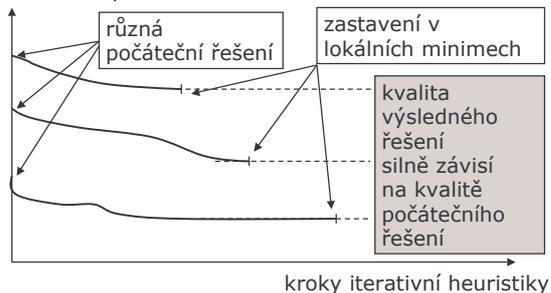
Lokální minimum

hodnota optimalizačního kritéria



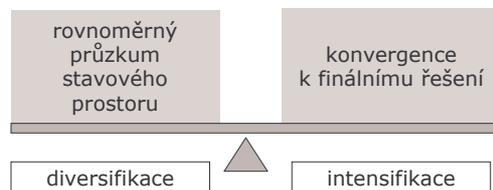
Uváznutí v lokálních minimech

hodnota optimalizačního kritéria



Řízení úniku z lokálních minim

připustit tah, který vede k horšímu řešení



Počátky analogie...

N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, E. Teller: Equation of state calculation by fast computing machines. J. of Chem. Phys, 21(1953), 1087-1091

S. Kirkpatrick, C. D. Gellat, M. P. Vecchi: Optimization by simulated annealing. Science, 220(1983), 671-680

V. Černý, A thermodynamical approach to the travelling salesman problem: an efficient simulation algorithm. J. of Optimization Theory and Applications, 45(1985), 41-55

Tuhnutí taveniny

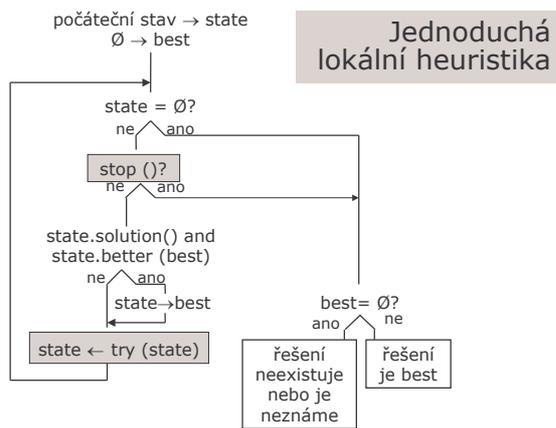
- vysoká teplota
- velká kinetická energie molekul
- kapalné skupenství
- opatrné chlazení
- velké krystaly
- nízká celková vazebná energie systému
- prudké chlazení
- malé krystaly
- vysoká celková vazebná energie systému
- nízká teplota
- vazebné síly převáží
- pevné skupenství
- krystalická stavba

Analogie

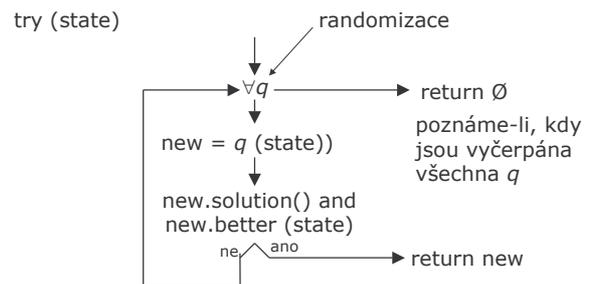
- stav systému → řešení
- změna stavu → přechod k sousednímu řešení
- energie systému → optimalizační kritérium
- krystalický stav → heuristické řešení
- kinetická energie molekul → ochota k přechodu do horšího stavu
- teplota → řídicí parametr

Formulace simulovaného ochlazování

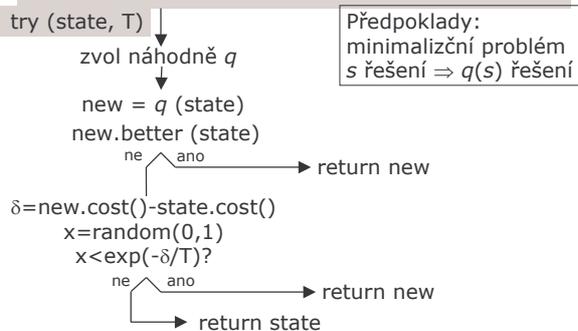
Jednoduchá lokální heuristika



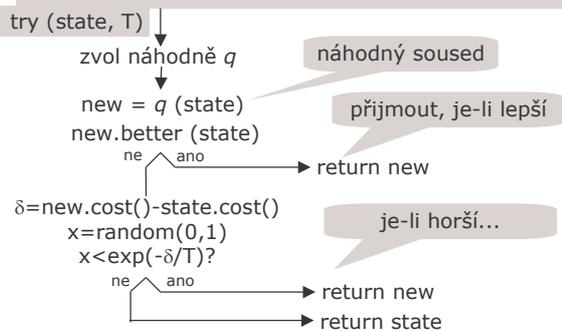
Prohledávání okolí pro metodu prvé zlepšení



Prohledávání okolí pro simulované ochlazování



Prohledávání okolí pro simulované ochlazování

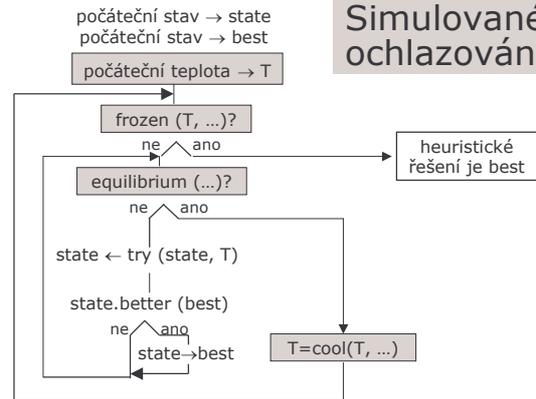


Rozhodování v případě, že nový stav je horší

$\delta = \text{new.cost()} - \text{state.cost()}$ rozdíl opt. kritéria
 $x = \text{random}(0,1)$
 $x < e^{-\delta/T}?$ pravděpodobnost p_{new}
 ne ano
→ return new
→ return state

$\delta \rightarrow 0$	$p_{\text{new}} \rightarrow 1$	nepatrné zhoršení se přijme vždy
$\delta \rightarrow \infty$	$p_{\text{new}} \rightarrow 0$	velké zhoršení se přijme zřídka
$T \rightarrow 0$	$p_{\text{new}} \rightarrow 0$	při nízké teplotě se zhoršení přijmou s malou pravděpodobností
$T \rightarrow \infty$	$p_{\text{new}} \rightarrow 1$	při vysoké teplotě se přijmou i velká zhoršení

Simulované ochlazování



Vlastnosti simulovaného ochlazování

Jak to funguje?

...děkuju, docela pěkně

- Počáteční stav
 - řešení z jiné (konstruktivní) heuristiky
 - náhodná řešení
- Vysoké teploty
 - velká pravděpodobnost přijetí horšího řešení
 - převaha diverzifikace
- Nízké teploty
 - konvergence k minimu
 - převaha intenzifikace

Teoretická analýza (Hajek)

pro funkci cool() ve tvaru

$$t_k = \frac{c}{\log(1+k)} \quad \begin{matrix} k \dots \text{číslo kroku} \\ c \dots \text{hloubka lokálního minima} \end{matrix}$$

proces po nekonečném počtu kroků skončí v globálním minimu (asymptotická konvergence)

kdo to má vědět?

Způsob použití simulovaného ochlazování

Co je třeba vymyslet...

počáteční teplota
cool(T, ...)
frozen(T, ...)
equilibrium(...)

rozvrh ochlazování

předem daný nebo
řízený zpětnou vazbou

stavový prostor (operace)
optimalizační kritérium
počáteční řešení

jako obvykle
u lokálních
iterativních heuristik

Teplota je parametr...

$\delta = \text{new.cost()} - \text{state.cost()}$
 $x = \text{random}(0, 1)$
 $x < \exp(-\delta/T)?$

- změníme metodu cost() tak, aby cenu vracela v halách místo v korunách
- měli bychom dostat stejné výsledky
- k tomu také T musí být 100× větší

Rozvrh ochlazování

$\text{cool}(T) = aT, 0,8 < a < 0,999$

souvise s ostatními
parametry rozvrhu

equilibrium():

- pevný počet kroků N
- N přijatých nebo $2N$ kroků
- ...

brání příliš
pomalému chlazení
při nízkých teplotách

souvise s cool(T)

Souvislost cool() a equilibrium()

Dáno:

Měníme:

počáteční teplota T_p
koncová teplota T_k
celkový počet iterací s

délku ekvilibria N

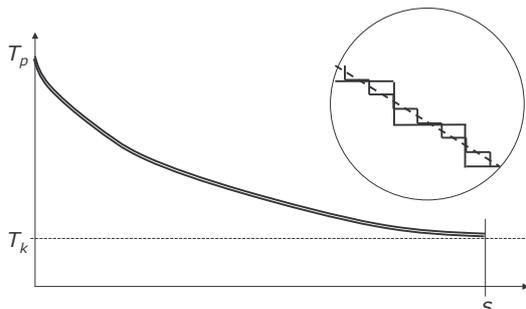
$T(x) \cong T_p \cdot a^{x/N}$
teplota v čase x

$T_k \cong T_p \cdot a^{s/N}$
koncová teplota

$$T(x) \cong T_p \left[\frac{T_k}{T_p} \right]^{x/s}$$

nezávisle na N

Ochlazování při konstantních T_k, T_p, s



Počáteční teplota

- Známe hloubku lokálních minim \Rightarrow nastavíme teplotu tak, aby pravděpodobnost úniku z minima byla např. 0,5
- Zpětnovazební řízení
 - rychle zvyšujeme teplotu
 - sledujeme četnost přijatých změn k horšímu
 - zaznamenáme teplotu pro pravděpodobnost např. 0,5
 - vrátíme původní stav a nastavíme teplotu

frozen()

- Četnost změn (jakýchkoli) klesla pod nastavenou mez
- Pevná mez teploty

Co je třeba vymyslet...

počáteční teplota
cool(T, ...)
frozen(T, ...)
equilibrium(...)

rozvrh ochlazování

předem daný nebo
řízený zpětnou vazbou

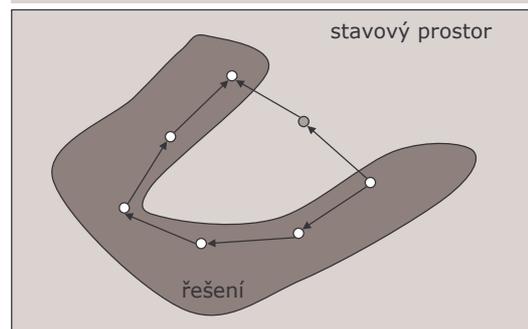
stavový prostor (operace)
optimalizační kritérium
počáteční řešení

jako obvykle
u lokálních
iterativních heuristik

Technika relaxace

- Co když nemohu zabránit, aby $q(s)$ převedla řešení na konfiguraci, kteřá řešením není?
- Obecný problém iterativních heuristik
- Relaxace
 - přiřážka k optimalizačnímu kritériu (pokud lze spočítat)
 - odhadnout vzdálenost od řešení a použít místo optimalizačního kritéria
- Jiná řešení
 - zahodit
 - opravit, např. některou z jednoduchých heuristik

Relaxace a dosažitelnost



Stavový prostor

- Randomizovaný algoritmus → statistické vlastnosti stavového prostoru
- Vzájemná dosažitelnost stavů, přibližně stejná
- Výpočet náhodného souseda a optimalizačního kritéria nejčastější operace, zjednodušit, i za cenu relaxace
- Hajekuv výsledek → vliv hloubky minim na činnost algoritmu → nepřidělovat algoritmu práci zbytečně divokým optimalizačním kritériem

Počáteční řešení

- Náhodná počáteční řešení
 - vícenásobné spuštění
 - měření iterativní síly
 - dobře aplikované simulované ochlazování není závislé na počátečním řešení – těžiště práce v iteracích
- Konstruktivní počáteční řešení
 - chytrá konstruktivní fáze – hluboké lokální minimum
 - alespoň nějaké minimum

Vymysleli jsme...

počáteční teplota
cool(T, ...)
frozen(T, ...)
equilibrium(...)

rozvrh ochlazování

předem daný nebo
řízený zpětnou vazbou

stavový prostor (operace)
optimalizační kritérium
počáteční řešení

jako obvykle
u lokálních
iterativních heuristik

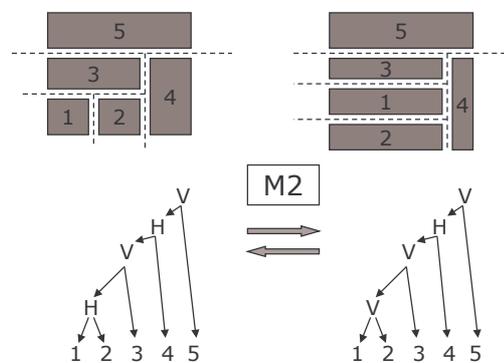
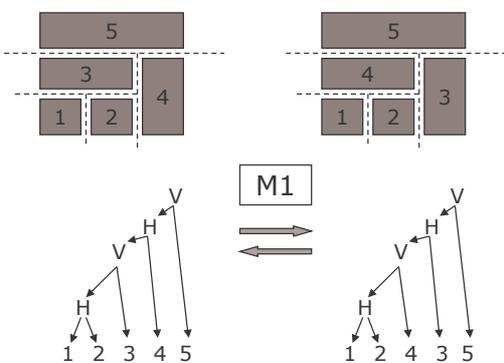
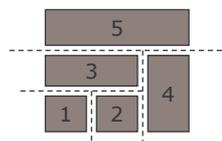
Je to dobře? Vývoj SA heuristik

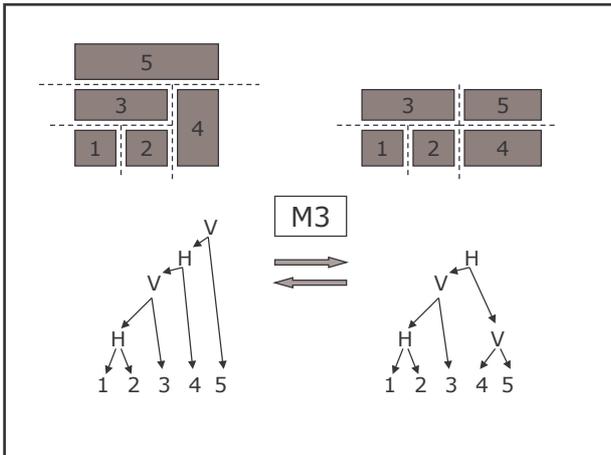
- Použitelnost v celém rozsahu zamýšlené aplikace bez ručních zásahů
- ⇒ dostatečný soubor zkušebních úloh, generátory
- hodnocení zkušebních úloh
- úloha vizualizace
 - podoba řešení
 - vývoj optimalizačního kritéria
- vývoj heuristiky a vývoj jejích adaptačních mechanismů

Příklad použití

Floorplanning

- Obdélníkové moduly se zadanou plochou, ale volitelným poměrem výška/šířka (v jistých mezích)
- Poskládat do obdélníka s minimální plochou
- Rozložení jednotek integrovaného obvodu
- Volíme omezení: tzv. řezové plány





Stavový prostor

- Všechny stavy jsou vzájemně dosažitelné (každá operace je pro to nutná)
- Vzájemná dosažitelnost je stejná (každý tah má svou inverzi, mezi každým párem stavů je možno přejít oběma směry)

Aplikace SA

- Počáteční teplota: pravděpodobnost přijetí průměrného zhoršení δ : $p_{0 \rightarrow 1}$
- Provést několik záměn, spočítat
- Ekvilibrum: $T_0 = -\frac{\delta}{\ln p_0}$
N zlepšení nebo 2N kroků, kde $N \approx n$
- $t_k = 0,85 t_{k-1}$
- Frozen: méně než 5% přijatých

Alternativní rozvrhy ochlazování

- Žíhání nefunguje!

Kombinace a alternativy SA

- pravděpodobnostní fce (profiling)

Paralelizace

- Ustálení při dané teplotě, různé nastavení generátoru pseudonáhodných čísel

- Více náhodných sousedů

zbytečné při vysokých teplotách

dublování při nízkých teplotách

přepnout

- Společná paměť, paralelní zápis mezivýsledků